

EJONS

Uluslararası Matematik, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Dergisi
International Journal on Mathematic, Engineering and Natural Sciences

Research Article

e-ISSN: 2602 - 4136

<https://doi.org/10.5281/zenodo.17948158>

Öğretmen adaylarının Ters Fonksiyonlara İlişkin Enstrümanlı Eylem Şemalarının İncelenmesi

Naz MARDANI ^{*}1, Menekşe Seden TAPAN BROUTİN ¹

¹ Bursa Uludağ Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi Bölümü, Bursa, Türkiye
Sorumlu Yazar Email: naz.mardani2@gmail.com

Makale Tarihçesi

Geliş: 08.10.2025
Kabul: 02.12.2025

Anahtar Kelimeler

Enstrümantal
Yaklaşım,
Öğretmen Adayları,
Teknoloji Destekli
Öğretim,
Temsiller,
Enstrümanlı Eylem
Şemalar

Özet: Bu çalışma, öğretmen adaylarının ters fonksiyonları temsil süreçlerini ve bu süreçlerde ortaya çıkan enstrümantal oluşumlarını incelemeyi amaçlamaktadır. Bu kapsamda, kâğıt-kalem ve dinamik geometri ortamlarında ters fonksiyonların yazımı ve grafiklerinin çizimine yönelik geliştirilen enstrümanlı eylem şemalarına odaklanarak, öğretmen adaylarının matematik öğretimine yönelik teknolojik araçların öğretim sürecindeki katkısı değerlendirilmiştir. Araştırma, Türkiye’de bir devlet üniversitesinde ilköğretim matematik öğretmenliği programının ikinci sınıfında öğrenim gören 6 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Araştırmanın verileri çalışma yapırağı, yazılı ve sözlü görüşmeler, ekran ve ses kayıtları ile toplanmış ve içerik analizi yöntemiyle çözümlenmiştir. Veriler kodlanmış, kategorilere ayrılmış ve enstrümantal yaklaşımın bileşenleri çatısında temalar oluşturulmuş ve araştırmanın amacı doğrultusunda yorumlanmıştır. Araştırmanın sonucunda, öğretmen adaylarının kâğıt-kalem ortamında geliştirdikleri enstrümanlı eylem şemalarının işlemsel düzeyde kaldığını, Cabri-Geometri ortamında ise kavramsal, etkileşimli ve çoklu temsilli şemalar geliştirdiğini ortaya konulmuştur. Dinamik ortamın görsel ve etkileşimli özellikleri, öğretmen adaylarının cebirsel kavramları anlamlandırma ve temsiller arası geçişlerini kolaylaştırarak, teknoloji entegrasyonunun matematik öğretiminde kavramsal öğrenmeyi destekleyici bir yaklaşım olarak benimsenmesi gerektiğini göstermektedir.

Investigating Pre-Service Teachers’ Instrumented Action Schemes Related to Inverse Functions

Article Info

Received: 08.10.2025
Accepted: 02.12.2025

Keywords

Instrumental
Approach,
Pre-Service Teachers,
Technology-Assisted
Teaching,
Representations,
Instrumented Action
Schemes

Abstract: This study aims to examine pre-service teachers’ processes of representing inverse functions and the instrumental genesis that emerges during these processes. Focusing on the instrumented action schemes developed for writing and graphing inverse functions in both paper-and-pencil and dynamic geometry environments, the study evaluates the contribution of technological tools to mathematics teaching. The research was conducted with six pre-service elementary mathematics teachers enrolled in the second year of a public university in Türkiye. Data were collected through worksheets, written and oral interviews, screen recordings, and audio recordings, and were analyzed using content analysis. The data were coded, categorized, and organized into themes within the framework of the components of the instrumental approach, then interpreted in line with the research purpose. The findings revealed that the instrumented action schemes developed by pre-service teachers in the paper-and-pencil environment remained at an operational level, whereas in the Cabri-Geometry environment they developed conceptual, interactive, and multi-representational schemes. The visual and interactive features of the dynamic environment facilitated pre-service teachers’ understanding of algebraic concepts and their transitions among representations. This indicates that technology integration should be adopted as an approach that supports conceptual learning in mathematics teaching.

1. Giriş

Matematik eğitiminde teknolojinin entegrasyonu, özellikle cebir gibi soyut kavramların öğretiminde farklı öğrenme ve öğretme yöntemlerine vesile olmaktadır. Cebir, matematik öğretiminde soyutluk düzeyi en yüksek alanlardan biri olup ve kavra yanılgılar öğrenme zorlukları açısından alanda pekçok araştırmaya konu olmuştur (Kieran, 1992; MacGregor ve Stacey, 1993). Örneğin, öğrencilerin değişken, eşitlik ve sembolik gösterimler gibi temel kavramları anlamlandırmada zorlandıkları, bilinmeyen ile sayı arasındaki farkı ayırt etmede ve fonksiyonel düşünmeyi yapılandırmada güçlük yaşadıkları birçok araştırmada vurgulanmıştır (Dede ve Argün, 2003). Bu durum, cebiri müfredatta kavramsal açıdan soyut öğrenme alanlarından biri olarak ön plana çıkarmaktadır (Kaput, 1998; Taşlıbeyaz, 2010). Öğrencilerin yaşadığı zorlukların önemli nedenlerinden biri, farklı temsiller arasında ilişki kuramamalarından kaynaklandığı literatürde raporlanmıştır (Yuhatriati ve ark., 2022). Sözel, sembolik, tablo ve grafiksel temsiller arasında geçiş yapamayan öğrencilerin kavramsal kopukluklar yaşadığı ortaya konulmuştur (Tall ve ark., 2001).

Dinamik geometri yazılımları, bu bağlamda öğrencilere farklı temsiller arasında ilişki kurma, cebirsel kavramları görselleştirme ve soyut düşünmeyi desteklemektedir. Cabri-Geometri gibi yazılımlar, sürükleme, ölçüm aktarım ve geometrik yer belirleme gibi özellikleriyle öğrencilerin grafiksel ve cebirsel temsilleri aynı anda görmelerini sağlamak ve böylece cebirsel ifadelerin somut temsillerini oluşturmaktadır (Trouche, 2005; Komatsu ve Jones, 2020). Buna ek olarak, literatürde sunulan kavramsal çerçeve ters fonksiyonların öğretiminde karşılaşılan zorlukların çoklu temsiller, grafik ve cebir ilişkisi, ve araç kullanımına bağlı bilişsel süreçlerle yakından ilişkili olduğunu göstermektedir.

Son yıllarda yapılan araştırmalar, öğrencilerin örneğin ters fonksiyonlar konusunda zorluklar yaşadığını ortaya koymuştur (Paoletti ve ark., 2018). Fonksiyonun birebirlik olma şartını fark etme, f^{-1} gösterimini anlamlandırma, değişkenlerin yer değiştirilmesine dayalı işlemsel yaklaşımı kavramsal temellerle ilişkilendirme ve fonksiyonun ve tersinin grafiksel olarak yorumlama bu konudaki zorlukları göstermektedir (Fitrianna ve ark., 2024). Öğrencilerin çoğu zaman ters fonksiyonları yalnızca işlemsel bir yaklaşım olarak görmeleri, kavramsal anlamın gölgede kalmasına yol açmaktadır. Aktarılan çalışmalar, ters fonksiyonların kavramsal temellerinin öğrenciler tarafından çoğu zaman yüzeysel biçimde ele alındığını ortaya koymaktadır; bu nedenle farklı temsil ortamlarının bu kavramsal yapıları nasıl etkilediğinin araştırılması önem taşımaktadır.

Bu noktada teknoloji destekli öğrenme ortamlarının, özellikle de dinamik geometri yazılımlarının, öğrencilerin çoklu temsiller arasında geçiş yapmalarını kolaylaştırdığı ve kavramsal anlamayı desteklediği belirtilmektedir (Segal ve ark., 2021). Araç kullanımıyla ilişkili öğrenme ortamlarında öğrencilerin geliştirdikleri zihinsel şemaları anlamak için geliştirilen kuramsal yaklaşımlardan biri enstrümantal oluşum teorisidir (Verillon ve Rabardel, 1995; Trouche, 2004). Bu teori, öğrencilerin araçlarla etkileşimleri sonucunda geliştirdikleri "enstrümanlı eylem şemaları"nı açıklamaktadır (Haspekian, 2005). Fonksiyon ve ters fonksiyon öğretiminde, enstrümantal yaklaşımın öğrencilerin araçla (dinamik geometri yazılımı) kurdukları stratejileri, çoklu temsiller arası geçişleri ve kavramsal anlamlandırmalarını incelemeye etkili olduğu çalışmalarla ortaya konmuştur (Ndlovu ve ark., 2011). Böylece ters fonksiyon öğretiminde dinamik geometri yazılımları gibi teknolojik araçlar yalnızca görselleştirme işlevi görmekle kalmamakta, aynı zamanda enstrümanlı eylem şemaları yoluyla kavramsal öğrenmeye katkı sağlamaktadır (Nolasco, 2018).

Bu çalışmanın teorik çerçevesini oluşturan enstrümantal oluşum teorisi (Verillon ve Rabardel, 1995), öğrencilerin araçları kullanırken geliştirdikleri zihinsel şemalarını belirlemektedir. Teoriye göre, öğrenciler araçlarla etkileşimleri sonucunda "enstrümanlı eylem

şemaları" geliştirmekte ve bu şemalar matematiksel anlamlandırmayı etkilemektedir (Trouche, 2004). Öğrencilerin geliştirdikleri eylem şemaları, öğretmenlerin enstrümanlı eylem şemaları tarafından doğrudan etkinmektedir (Laborde, 2002).

Bu bağlamda deneyimli öğretmenler, var olan matematik bilgilerini ve öğretim bilgilerini kullanarak enstrümanlı eylem şemaları üzerinden öğrencileri yönlendirmektedir. Buna karşılık öğretmen adayları, henüz oluşum sürecindeki matematik bilgileri ile öğretim bilgilerini aynı anda geliştirirken, bu iki bilgi alanıyla eşzamanlı olarak enstrümanlı eylem şemalarını da inşa etmektedir. Öğretmen adayları, Cabri-Geometri gibi araçları yalnızca teknik düzeyde 'nasıl kullanılır' bilgisini edinmek için değil, aynı zamanda matematiksel kavramları öğrenme ve gelecekte bu kavramları öğrencilere öğreteceklerini düşünerek matematik bilgisi ile öğretim bilgisini bütünleştirme aracı olarak kullanılmaktadırlar (Tapan, 2006). Dolayısıyla öğretmen adaylarının bu deneyimleri, ileride öğretmenlik uygulamalarında öğrencilerinin, kavramsal temellere dayalı enstrümanlı eylem şemaları geliştirmelerine rehberlik edebilmeleri için önemli olduğu düşünülmektedir. Enstrümantal oluşum teorisi çerçevesinde, bireylerin kullandıkları araçlar farklı öğrenme ortamlarında çeşitlenmekte ve bu ortamlarda farklı enstrümanlı eylem şemaları ortaya çıkabilmektedir. Bu perspektiften, kâğıt-kalem ve dinamik geometri ortamlarda geliştirdikleri bu şemalar arasındaki farklılıkların incelenmesi, matematik eğitiminde teknoloji entegrasyonu açısından önem arz etmektedir (Haspekian, 2005; Drijvers ve Trouche, 2008). Çalışmanın temel odak noktası, kâğıt-kalem ve dinamik geometri ortamlarında geliştirilen enstrümanlı eylem şemalarının analiz edilmesi ve bu şemalar arasındaki benzerlik ve farklılıkların ortaya konulmasıdır.

Örneğin ters fonksiyonların öğretiminde, kâğıt-kalem ortamında bir fonksiyonun tersini elde etme amacıyla yapılan "x ve y değişkenlerinin yer değiştirilmesi" işlemi, genellikle işlemsel olarak uygulanmakta ve kavramsal temellerle ilişkilendirilememektedir. Buna karşılık, dinamik geometri ortamında $y=x$ doğrusuna göre simetri alma, geometrik yer belirleme ve tanım kümesini dinamik olarak kısıtlama gibi enstrümanlı teknikler sayesinde, ters fonksiyon kavramı sadece cebirsel bir dönüşüm değil, fonksiyonun grafiksel ve yapısal bir özelliği olarak yeniden inşa edilmektedir. Bu süreçte Cabri-Geometri dinamik geometri ortamı, öğrenenin amaçları doğrultusunda dönüştürülerek bir enstrüman hâline gelmekte; öğrenen ise ters fonksiyonlara ilişkin simetri, örtenlik, birebirlik ve tanım kümesi kavramlarını içeren enstrümanlı eylem şemaları geliştirmektedir. Bu örnek, enstrümantal oluşum teorisinin ters fonksiyonların kavramsal anlamlandırılmasını açıklamada işlevsel bir çerçeve sunduğunu ortaya koymaktadır.

Bu çalışma, ters fonksiyonların öğretiminde çoğunlukla işlemsel yaklaşımlar ve cebirsel dönüşümlerle sınırlandırılan mevcut literatürün ötesine geçerek, öğretmen adaylarının ters fonksiyonları kâğıt-kalem ve dinamik geometri ortamlarında çoklu temsiller, simetri ilişkisi ve tanım kümesi kısıtlamaları üzerinden nasıl anlamlandırdıklarını enstrümantal oluşum teorisi çerçevesinde incelemekte; bu yönüyle ters fonksiyonların kavramsal yapılandırılmasına ve teknoloji destekli cebir öğretimine özgün bir katkı sunmaktadır. Araştırmanın bu odak çerçevesinde aşağıda belirtilen problem ve altproblemlere cevap aranmıştır.

Araştırma problemi: Dinamik geometri yazılımı ve kâğıt-kalem temelli öğretim ortamlarında öğretmen adaylarının ters fonksiyonlara ilişkin enstrümantal oluşumları nasıldır?

Araştırmanın alt problemleri:

1. Öğretmen adaylarının kâğıt-kalem ortamında ters fonksiyonlara ilişkin enstrümanlı eylem şemaları nelerdir?
2. Öğretmen adaylarının dinamik geometri ortamında ters fonksiyonlara ilişkin enstrümanlı eylem şemaları nelerdir?

3. Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamı ve dinamik geometri ortamında ters fonksiyonlara ilişkin enstrümanlı eylem şemaları arasındaki farklılıklar nasıldır?

2. Materyal ve Yöntem

Literatürde teknoloji destekli öğretimin soyut matematik kavramlarını somutlaştırmada etkili olduğu, özellikle tablo, grafik ve cebirsel ifadeler gibi farklı temsiller arasında bağlantı kurmayı kolaylaştırdığı vurgulanmaktadır (Kaput, 1998; NCTM, 2000). Öğrenenlerin yalnızca sembolik düzeyde değil, görsel ve sözel temsiller aracılığıyla da matematiksel ilişkileri inşa edebilmeleri, enstrümantal oluşum sürecinin merkezinde yer almakta ve çoklu temsiller yaklaşımıyla doğrudan kesişmektedir. Bir matematiksel kavramın cebirsel, grafiksel, sayısal ve sözel biçimlerde ifade edilmesi ve bu temsiller arasındaki ilişkilerin kurulması olarak tanımlanmaktadır (Janvier, 1987; Ainsworth, 1999). Fonksiyon ve ters fonksiyon kavramları, doğaları gereği temsil çeşitliliği üzerinden anlamlandırabilmektedir. Son yıllarda yapılan çalışmalar, dijital teknolojilerin matematik eğitiminde öğrencilerin kavramsal anlamlandırma süreçlerini destekleyen bilişsel araçlar olarak ele alınması gerektiğini vurgulamaktadır. Özellikle dinamik geometri yazılımlarının, fonksiyonların grafiksel davranışlarını inceleme ve çoklu temsiller arasında geçiş yapma açısından önemli olanaklar sunduğu belirtilmektedir (Segal ve ark., 2021; Song, 2021; Drijvers ve Sinclair, 2024).

Literatürde, öğrenciler ve öğretmenlerin dinamik geometri yazılımları ile kağıt-kalem ortamı arasında geçiş yapma süreçlerini inceleyen çalışmalar bulunmaktadır. Komatsu ve Jones (2020), öğrencilerin genelleme ve ispat süreçlerinde kâğıt-kalem etkinlikleri ile dinamik geometri ortamlarının etkileşim içinde kullanıldığını göstermiş; özellikle yazılımın genelleme aşamasında destek sunduğunu, ancak ispatın gerekçelendirilmesinde kâğıt-kalem çalışmalarının belirleyici olduğunu ortaya koymuştur. Benzer biçimde, Öçal ve arkadaşları (2020) öğretmen adaylarının problem kurma becerilerini her iki ortamda karşılaştırmış ve dinamik geometri ortamının adayların kavramsal hataları fark etme ve yaratıcı çözüm üretme becerilerini güçlendirdiğini belirtmiştir. Bununla birlikte, mevcut çalışmalar çoğunlukla problem kurma, genelleme veya ispat süreçlerine odaklanmış, ters fonksiyonların öğretiminde öğretmen adaylarının enstrümanlı eylem şemalarının farklı ortamlarda şekillenmesine dair bulgular ise sınırlı kalmıştır. Bu çalışma, söz konusu boşluğu doldurmayı hedeflemektedir. Kâğıt-kalem ortamında eksik veya yanlış biçimde ortaya çıkan enstrümanlı eylem şemalarının, Cabri-Geometri yardımıyla deneyimsel olarak çalışıldıktan sonra düzeltilip geliştirildiği gözlemlenmiştir. Böylelikle öğretmen adaylarının kavramsal anlayışları pekişmiş ve ters fonksiyonun çoklu temsiller aracılığıyla inşa edilmesi mümkün olmuştur. Bu katkı, öğretmen adaylarının mesleğe başladıklarında soyut cebirsel kavramları öğrencilerine anlamlı bir biçimde aktarabilmelerine zemin hazırlamaktadır. Öğrenciler ise analitik geometri ile cebir arasında bağlantılar kurarak, cebir derslerini yalnızca mekanik işlemler düzeyinde değil, somut ve ilişkilendirilmiş bir öğrenme deneyimi olarak kavrayabileceklerdir.

Bu çalışmada kuramsal çerçeveyi destekleyen bir diğer yaklaşım ise RBC+C soyutlama modelidir. Dreyfus ve Tsamir (2004) tarafından geliştirilen bu model, soyutlamanın yalnızca yeni yapılar oluşturmakla sınırlı kalmadığını, aynı zamanda bu yapıların pekiştirilmesiyle kalıcı ve esnek hale geldiğini ortaya koymaktadır. Modelin temel aşamaları tanıma (recognizing), kullanma (building-with) ve oluşturma (constructing) iken, daha sonra eklenen pekiştirme (consolidation) aşaması, öğrencilerin kendi oluşturdukları yapıları güvenle fark etmelerine ve farklı bağlamlarda yeniden kullanabilmelerine imkân tanımaktadır (Dreyfus ve ark., 2015). Ters fonksiyonların öğretiminde, öğrencilerin önce doğrusal ve parabolik fonksiyonların özelliklerini tanıyıp kullanmaları, ardından ters fonksiyon kavramını yapılandırmaları bu sürecin ilk üç aşamasını karşılamaktadır. Cabri-Geometri ortamında gerçekleştirilen çoklu temsillerle desteklenen etkinlikler ise bu yeni yapıların pekiştirilmesine katkı sağlamakta;

öğretmen adaylarının hem kâğıt-kalem hem de teknolojik ortamda geliştirdikleri soyut yapıları kalıcı olarak kullanabilmelerine olanak tanımaktadır.

2.1. Yöntem

Bu bölümde araştırma modeline, bu araştırma modelinin seçimine karar verilme şekline kullanılan modelin yapısına, araştırmanın ortam ve katılımcılarına, katılımcıların belirlenme kriterlerine, öğretim sürecinde kullanılan materyallerin ve ders planlarının tasarımına, pilot çalışma ve uygulama sürecinde yaşananlara, araştırma modeli ve problemine yönelik olarak kullanılan veri toplama araçlarının seçilme şekline ve toplanan verilerin analizine değinilmiştir. Ayrıca veri toplama süreci ve analizinin geçerlik ve güvenirlik çalışmalarından bahsedilmiştir.

2.2. Araştırma modeli

Bu çalışmada, öğretmen adaylarının bilgisayar destekli ve kâğıt-kalem ortamlardaki enstrümantal süreçlerini incelemek için nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Frankel ve Devers'in (2000) tanımladığı gibi, bu yaklaşım gerçek ortamlarda esnek veri toplamaya ve tümevarımsal analize olanak sağlamaktadır. Çalışma, öğretmen adaylarının doğrusal ve parabolik fonksiyonların tersi ve grafik çizimine yönelik enstrümanlı eylem şemalarını ortaya çıkarmayı amaçlayan bir öğretim deneyi olarak uygulanmıştır. Öğretim deneyi, nitel araştırma yaklaşımları kapsamında yer alan ve araştırmacıların etkinlikleri yapılandırarak keşfetmeye dayalı kavramsal bir çerçeve sunduğu, öğrencilerin matematiksel bilgi yapılarını çeşitli yollar ve araçlarla etkilemeyi amaçladığı bir yöntem olup, veriler klinik görüşmeler, doğrudan gözlemler, alan notları ve öğrenme ortamında kaydedilen video kayıtları gibi nitel veri toplama teknikleriyle elde edilmektedir (Engelhardt ve ark., 2004; Steffe ve Ulrich, 2014).

Bu çalışma, öğretim deneyi deseni temel alınarak yürütülmüştür. Uygulama süreci toplam dört hafta sürmüş, haftada iki ders saati olmak üzere sekiz ders saati boyunca yürütülmüştür. Araştırmacı, adayların konuya ilişkin düşünce yapılarına dair varsayımlar geliştirerek Cabri-Geometri dinamik geometri yazılımı destekli etkinlikler tasarlamış ve öğretim sürecini doğrudan kendisi yürütmüştür. Süreç boyunca elde edilen ses ve ekran kayıtları, çalışma yapıtları ve görüşme verileri nitel olarak analiz edilmiş; öğretmen adaylarının matematiksel düşünme biçimleri ve geliştirdikleri yapılar modellenerek bilişsel çözümlemeler yapılmıştır. Sürecin bütününde, öğretimin araştırmacı tarafından yönlendirilmesi, öğretmen adayları düşüncesine dair varsayımların verilerle test edilerek yeniden yapılandırılması ve öğrenme ortamlarının (kâğıt-kalem ve Cabri-Geometri) bu doğrultuda düzenlenmesi, çalışmanın öğretim deneyi metodolojisine dayandığını açıkça ortaya koymaktadır.

2.3. Çalışma ortamı ve grubu

Araştırma, Bursa Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi dersliklerinde, Cabri-Geometri yazılımı ile uyumlu akıllı tahtanın bulunduğu sınıflarda gerçekleştirilmiştir. Öğretme adayları çoğunlukla tahtaya dönük oturma düzeninde derse katılmış, ancak bazı oturumlarda sınıf içi etkileşimi artırmak amacıyla grup çalışmaları yapılmıştır. Katılımcılar, üniversitenin Matematik Öğretmenliği Bölümünde ikinci sınıfında öğrenim gören öğretmen adaylarından oluşmaktadır. Bu sınıf düzeyinin seçilme nedeni, adayların daha önce bilgisayar destekli matematik eğitimi dersi almamış olmalarıdır. Cabri-Geometri'yi ilk kez deneyimleyen öğrenciler, çizim sürecinde kendi yöntemlerini geliştirerek yeni matematiksel yapılar inşa etmiştir, farklı temsiller arasında bağlantılar kurmuş ve böylelikle kâğıt-kalem ortamı ile dijital ortam arasındaki farkları daha net biçimde görmüşlerdir. Araştırmanın pilot uygulamasına 20, asıl uygulamasına ise 34 öğretmen adayı katılmıştır. Asıl uygulamada, sınıf genelinde yürütülen etkinliklerin yanında, altı öğretmen adayı ikiye bölünmüş ve böylelikle kâğıt-kalem ortamı ile dijital ortam arasındaki farkları daha net biçimde görmüşlerdir. Araştırmanın pilot uygulamasına 20, asıl uygulamasına ise 34 öğretmen adayı katılmıştır. Asıl uygulamada, sınıf genelinde yürütülen etkinliklerin yanında, altı öğretmen adayı ikiye bölünmüş ve böylelikle kâğıt-kalem ortamı ile dijital ortam arasındaki farkları daha net biçimde görmüşlerdir. Araştırmanın pilot uygulamasına 20, asıl uygulamasına ise 34 öğretmen adayı katılmıştır. Asıl uygulamada, sınıf genelinde yürütülen etkinliklerin yanında, altı öğretmen adayı ikiye bölünmüş ve böylelikle kâğıt-kalem ortamı ile dijital ortam arasındaki farkları daha net biçimde görmüşlerdir.

oluşturulmuştur. Buna göre, birinci grup orta, ikinci grup yüksek, üçüncü grup ise düşük başarı düzeyine sahip öğretmen adaylarından meydana gelmiştir. Grupların belirlenmesinde, uygulama öncesinde verilen üç ders seanslık Cabri-Geometri eğitimi, ayrıca cebir alanına yönelik sorular ve açık uçlu ön görüşme formlarından elde edilen veriler dikkate alınmıştır. Bu veriler, öğretmen adaylarının ters fonksiyonlara ilişkin kavramsal doğrulukları, kullandıkları temsil türleri ve çözüm stratejilerinin niteliği dikkate alınarak bütüncül biçimde değerlendirilmiş ve bu değerlendirme sonucunda başarı düzeyleri düşük, orta ve yüksek olarak sınıflandırılmıştır. Bu gruplandırmanın amacı, enstrümantal oluşum süreçlerinin farklı öğrenme düzeylerinde şekillendirme biçimini incelemek ve elde edilen bulguların genellenebilirliğini artırmak açısından önem arz etmektedir. Seçilen öğretmen adaylarıyla yapılan yüz yüze görüşmeler, ders saatleri dışında ve tamamen gönüllülük esasına dayalı olarak gerçekleştirilmiştir.

2.4. Veri toplama araçları ve süreci

Araştırmada veri toplama ve çözümleme süreci, pilot ve asıl uygulama olmak üzere iki aşamada yürütülmüştür. Pilot çalışma, 2022-2023 bahar döneminde Türkiye’de bir devlet üniversitesinin matematik eğitimi bölümünde öğrenim gören 20 öğretmen adayıyla gerçekleştirilmiştir. Bu süreçte, ters fonksiyonlar konusu, dinamik geometri yazılımı ve enstrümantal oluşum teorisi temel alınarak hazırlanan ders planları uygulanmış; elde edilen bulgular doğrultusunda materyaller ve veri toplama araçları revize edilerek son halini almıştır. Veri toplama sürecinde, çalışma yapıları, yazılı ve sözlü görüşmeler, ses kayıtları ve ekran kayıtları araçlarıyla öğretmen adaylarının hem Cabri-Geometri hem de kâğıt-kalem ortamlardaki enstrümantal oluşum süreçleri incelenmiştir. Veri toplama araçları oluşturulurken pilot uygulamanın analizleri, uzman görüşleri ve katılımcı geri bildirimleri dikkate alınmıştır. Geliştirilen bu modül, 2023-2024 güz döneminde Bilgisayar Destekli Matematik Öğretimi dersi kapsamında asıl uygulama olarak aynı üniversitedeki farklı matematik öğretmen adaylarına uygulanmıştır. Araştırmacı, öğretmen adaylarıyla etkileşimler kurarak verilerin doğal bir ortamda toplanmasına özen göstermiştir. Aşağıda, araştırmada kullanılan veri toplama araçları tanıtılmıştır.

Ters fonksiyonlar çalışma yaprağı: Bu çalışmada, doğrusal ve parabolik fonksiyonların tersini önce kâğıt-kalem sonra Cabri-Geometri ortamında çoklu temsillerin enstrümantal oluşum teorisi bağlamında çalışılmak üzere 1 çalışma yaprağı hazırlanmıştır. Bu yaprak, doğrusal ve parabolik fonksiyonların tersine ilişkin kademeli olarak ilerleyen etkinlikler içermektedir. Bu süreç, iki ortam arasındaki öğrenme, oluşan ve gelişen enstrümanlı eylem şemalarının farklılıklarını belirlemek için tasarlanmıştır. Doğrusal fonksiyonlar durumunda $f(x)=ax+b$ ($a \neq 0$) için ters fonksiyon cebirsel olarak doğrudan elde edilmektedir: $y=ax+b \Rightarrow f^{-1}(x)=(x-b)/a$. Grafiksel düzlemde f^{-1} , f ’nin $y=x$ doğrusuna göre simetrisidir. Kâğıt-kalem ortamında karakteristik noktalar seçilmekte, örneğin $(0,b)$ noktası $(b,0)$ ’a, $(1,a+b)$ noktası ise $(a+b,1)$ ’e dönüşmekte ve tabloya geçirilerek grafikte tutarlılığı doğrulanmaktadır. Cabri-Geometri’de süreç, hareketli bir $A=(t,0)$ noktası üzerinden $B=(t,at+b)$ görüntüsünün geometrik yerini yani $y=ax+b$ grafiğini oluşturmakta; ardından B ’nin $y=x$ ’e göre simetrisi B' izleri oluşturarak $f^{-1}(x)=(x-b)/a$ grafiğini vermektedir. Bu etkileşim, öğretmen adaylarının doğrusal fonksiyon ve tersinin simetri ilişkisini deneyimsel biçimde anlamlandırmasına imkân tanıyacağı düşünülmektedir. Parabolik durumda $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) için ters fonksiyonun elde edilmesi tekdüzelik koşuluna bağlıdır. Tepe noktası $xv=-b/2a$, $yv=f(xv)$ bulunmakta; birebirlik için tanım kümesi ya $x \geq xv$ ya da $x \leq xv$ olacak biçimde kısıtlanmaktadır. Ters fonksiyonun var olabilmesi için f ’in birebir olması gerekir. Doğrusal fonksiyonlar doğaları gereği tekdüzedir ve dolayısıyla birebirdir. Parabolik fonksiyonlar ise tüm $\mathbb{R}$ ’de tekdüze değildir; bu nedenle tanım kümesi tepe noktasının bir tarafıyla sınırlandırılarak tekdüze hale

getirilir ve böylece birebirlik koşulu sağlanır. Bu durumda $y=ax^2+bx+c$ denklemi çözülerek ters ifade elde edilmektedir:

$$f^{-1}(x) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4ax}}{2a}$$

Burada “±” işareti seçilen kola göre belirlenmektedir. Değer kümesi $a>0$ için $[yv,\infty)$, $a<0$ $(-\infty,yv]$ olduğundan, f^{-1} ’in tanım kümesi buna göre yazılmaktadır. Tepe noktası $V=(xv,yv)$ ile $V'=(yv,xv)$ karşılaştırması, $y=x$ simetrisini açık biçimde göstermektedir. Kâğıt-kalem çözümünde birkaç $(x,f(x))$ çifti seçilmekte, karşılıkları $(f(x),x)$ olarak tabloya geçirilmekte ve grafik üzerinde yansıma ile doğrulanmaktadır. Cabri-Geometri ortamında ise $x=xv$ simetri doğrusu ve $y=x$ çizilmekte, $A=(t,0)$ noktası seçilen kola kısıtlanarak $B=(t,at^2+bt+c)$ noktası sürüklenmekte, ardından B’nin $y=x$ ’e yansıması B' izleri açılarak f^{-1} ’in grafiği elde edilmektedir. Bu süreçte tepe noktası ve diğer noktaların dönüşümü öğrencilerin çoklu temsiller aracılığıyla kavramın yapısını anlamlandırmasına yardımcı olacağı düşünülmektedir. Bu çalışma yaprağı ek 1’de verilmiştir.

Ses Kayıtları: Katılımcıların Cabri-Geometri kullanım süreçlerini detaylı bir şekilde incelemek için 6 öğrenci ikiye bölünmüş ve ders boyunca yapılan konuşmalar ses kayıt cihazlarıyla kaydedilmiştir. Bu kayıtlar, öğrencilerin problem çözme süreçlerindeki etkileşimlerini ve bilişsel gelişimlerini analiz etmek için kullanılmıştır.

Ekran Kayıtları: Öğretmen adaylarının Cabri-Geometri ortamındaki etkileşimlerini ve grafik oluşturma süreçlerini kaydetmek amacıyla ekran kaydedici programlar kullanılmıştır. Bu kayıtlar, öğrencilerin kullanım şemalarını ve matematiksel yapılarla kurdukları ilişkileri gözlemlemeye olanak sağlamıştır.

Yazılı Görüşmeler: Araştırmada öğretmen adaylarının görüşlerini belirlemek amacıyla yapılandırılmış bir görüşme formu geliştirilmiştir. Açık uçlu sorulardan oluşan bu formun geçerlik ve güvenirliği, uzman görüşleri alınarak ve pilot uygulama yapılarak sağlanmış; gerekli revizyonların ardından form son haline getirilmiştir. Görüşme formu, öğretmen adaylarının cebirsel ifadeler, çoklu temsiller ve teknoloji kullanımı konularındaki bilişsel düzeylerini ortaya koymayı hedefleyen 9 sorudan oluşmaktadır.

Sözlü Görüşmeler: Uygulama sonrası gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış sözlü görüşmeler, öğretmen adaylarının Cabri-Geometri ortamındaki deneyimlerini, karşılaştıkları güçlükleri ve bu süreçte geliştirdikleri enstrümanlı eylem şemalarını ortaya koymak amacıyla yapılmıştır. Ders saatleri dışında, gönüllülük esasına dayalı olarak ve sessiz bir sınıf ortamında altı öğretmen adayıyla yürütülen görüşmelerde kullanılan sorular, öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini değerlendirmeyi; cebirsel ifadeleri grafiksel temsiller aracılığıyla anlamlandırma biçimlerini ve fonksiyon–ters fonksiyon ilişkilerini kavramsal düzeyde yapılandırma süreçlerini incelemeyi hedeflemiştir. Ayrıca görüşmeler, birebirlik, örtenlik ve simetri gibi kavramlara ilişkin farkındalıkların gelişimini, teknoloji kullanımına yönelik algılardaki değişimleri ve çoklu temsillerle çalışma becerilerindeki dönüşümü de açığa çıkarmaya odaklanmıştır.

Bu çalışmada farklı veri toplama araçlarının kullanılması nedeniyle, bu verilerin araştırma sorularını yanıtlamaya yönelik biçimde düzenlenmesine açıklık getirilmiştir. Bu kapsamda, araştırma soruları ile veri toplama araçları ve analiz süreçlerini eşleştiren tablo 1’de yer verilmiştir.

Tablo 1. Veri toplama araçları kullanım amacı ve kullanım zamanı

Araştırmanın alt problemleri	Analiz süreci	Veri toplama Aracı
Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında ters fonksiyonlara ilişkin enstrümanlı eylem şemaları nelerdir?	Çalışma yaprağı (kağıt-kalem ortamı soruları), ses kayıtları ve yazılı görüşmeler analiz edilerek kullanılan enstrümanlı teknikler, enstrümantal oluşum süreci ve kağıt-kalem ortamındaki enstrümanlı eylem şemaları belirlenmiş; bu şemalara göre kodlar ve temalar oluşturulmuştur.	Çalışma yaprağı (kağıt-kalem ortamı soruları, Ses kaydı, Yazılı ve sözlü görüşmeler
Öğretmen adaylarının dinamik geometri ortamında ters fonksiyonlara ilişkin enstrümanlı eylem şemaları nelerdir?	Çalışma yaprağı (Cabri-Geometri ortamı soruları), ses ve ekran kayıtları ile yazılı ve sözlü görüşmeler analiz edilerek kullanılan enstrümanlı teknikler, enstrümantal oluşum süreci ve kağıt-kalem ortamındaki enstrümanlı eylem şemaları belirlenmiş; bu şemalara göre kodlar ve temalar oluşturulmuştur.	Çalışma yaprağı (Cabri-Geometri ortamı soruları), Ses kaydı, Ekran kaydı, Yazılı ve sözlü görüşmeler
Öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamı ve dinamik geometri ortamında ters fonksiyonlara ilişkin enstrümanlı eylem şemaları arasındaki farklılıklar nasıldır?	Çalışma yaprağı (Cabri-Geometri ortamı soruları), Ses kaydı, Ekran kaydı, yazılı ve sözlü görüşmeler analiz edilerek kullanılan enstrümanlı teknikler, enstrümantal oluşum süreci ve kağıt-kalem ortamındaki enstrümanlı eylem şemaları belirlenmiş ve şemalara göre kodlar ve temalar oluşturulmuştur	Çalışma yaprağı, Ses kaydı, Ekran kaydı, Yazılı ve sözlü görüşme

2.5. Araştırmacının rolü

Nitel araştırma yaklaşımında araştırmacı, veri toplama sürecinin aktif bir bileşeni olarak kabul edilmektedir (Cresswell, 2013). Bu araştırma matematik eğitimi alanında uzman iki akademisyenin işbirliğiyle yürütülmüştür. Araştırmacılardan birisi, katılımcı gözlemci rolü üstlenerek öğretim sürecine doğrudan dâhil olurken, diğeri teknoloji destekli öğretim uzmanı olarak tüm süreçlerde rol üstlenmiştir. Çalışma boyunca araştırmacılar, öğrenci etkileşimlerini gözlemleme, rehberlik etme ve öğrenme ortamını şekillendirme gibi çoklu roller üstlenmişlerdir. Sürekli analizlerle her oturum sonrası düzenlemeler yapılmış, geriye dönük analizlerle değerlendirmeler gerçekleştirilmiştir. Pilot uygulamada elde edilen veriler, hem araştırmanın güvenilirliğini sağlamak hem de veri toplama araçlarını iyileştirmek amacıyla kullanılarak, öğrenme süreçlerinin anlaşılmasına katkı sağlanmıştır.

2.6. Verilen çözümlenmesi

Bu çalışmada elde edilen veriler, içerik analizi yöntemiyle çözümlenmiş ve enstrümantal oluşum teorisi çerçevesinde yorumlanmıştır. Çözümleme süreci birkaç aşamada yürütülmüştür. İlk aşamada, derslerde gerçekleştirilen etkinlikler sırasında toplanan ses kayıtları yazıya dökülmüş, katılımcıların çalışma yapıları ve Cabri-Geometri ortamına ilişkin ekran kayıtlarıyla birlikte incelenmiştir. Bunun yanı sıra, seçilen katılımcılarla gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış yazılı ve sözlü görüşmelerde elde edilen veriler de çözümlenerek mevcut verilerle karşılaştırılmış, böylece veriler arasında bütünlük sağlanmıştır. Sonrasında, elde edilen tüm veriler kodlanmıştır. Kodlama sürecinde, öğretmen adaylarının kullandıkları enstrümanlı teknikler, enstrümantal oluşum süreçleri ve geliştirdikleri enstrümanlı eylem şemalarına ilişkin ifadeler satır satır incelenmiştir. Bu süreçte oldukça fazla sayıda kod elde edilmiş; ancak doğrudan kodların raporlanması çalışmada dağınıklığa yol açabileceğinden, benzer içeriklere sahip kodlar bir araya getirilerek kategoriler oluşturulmuştur. Bu kategoriler enstrümantal oluşum teorisinin bileşenleri (işlevsel sabitler, eylemdeki teoremler, eylemdeki kavramlar) doğrultusunda yeniden düzenlenmiş ve temalar oluşturulmuştur. Böylece, öğretmen adaylarının

hem kâğıt-kalem ortamında hem de dinamik geometri yazılımı ortamında geliştirdikleri enstrümantal oluşum süreçlerini ve bu doğrultuda enstrümanlı eylem şemalarını ortaya çıkarmak amacıyla kullanılan enstrümanlı teknikler belirlenmiştir. Son olarak elde edilen sonuçlar, araştırmanın amacı ve elde edilen temalar doğrultusunda yorumlanmıştır. Bu aşamalı analiz süreci sayesinde, verilerin yalnızca betimlenmesi değil, aynı zamanda öğretmen adaylarının farklı ortamlarda geliştirdikleri enstrümanlı eylem şemalarının karşılaştırılması mümkün olmuştur.

2.7. Verilerin geçerliği ve güvenilirliği

Nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenilirlik, aktarılabilirlik (transferability), inandırıcılık (credibility), teyit edilebilirlik (confirmability) ve tutarlılık (dependability) kriterleri çerçevesinde sağlanmıştır. Bu doğrultuda, araştırma sürecinin güvenilirliğini artırmak için katılımcılarla uzun süreli etkileşim kurulmuş, veri analizinde uzman görüşüne başvurulmuş ve tüm süreç belgelenmiştir. Ayrıca, araştırmanın verileri gönüllülük esasına dayalı seçilen katılımcılar üzerinden toplanmış ve bulgular doğrudan alıntılarla desteklenerek araştırmanın güvenilirliği güçlendirilmiştir (Creswell, 2013). Katılımcıların kimlik bilgileri gizli tutulmuş, isimleri ve diğer kişisel tanımlayıcılar çalışmada yer almamış ve bu sayede etik açıdan katılımcıların mahremiyeti korunmuştur.

3. Bulgular ve Tartışma

Bu çalışmada, ikişerli gruplar halinde çalışan 6 öğretmen adayının Cabri-Geometri ortamını kullanarak doğrusal ve parabolik fonksiyonlarına ilişkin ters fonksiyonları çözme ve grafiklerini oluşturma süreçleri, enstrümantal oluşum teorisi çerçevesinde analiz edilmiştir. Çalışma yaprakları üzerinden yapılan incelemelerde, öğretmen adaylarının hem enstrümantasyon (araç kullanım tekniklerini öğrenme) hem de enstrümantalizasyon (araçları kendi amaçları doğrultusunda dönüştürme) süreçleri incelenmiş, bu süreçlerde öğretmen adaylarının oluşturdukları veya geliştirdikleri eylem şemaları ortaya konulmuştur.

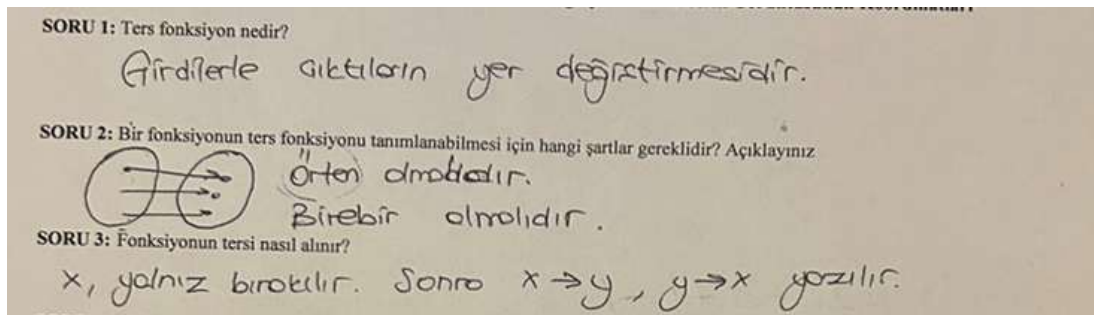
3.1. Ters fonksiyonlara ilişkin enstrümanlı teknikler, enstrümantal oluşum süreci ve enstrümanlı eylem şeması

Ters fonksiyonlar ile ilgili çalışma yaprağı bilgisayar ve kâğıt-kalem ortamında yapılan ve 5 farklı sorunun incelenmesini içeren bir çalışma yaprağıdır. Bu yaprakta, öğretmen adaylarından verilen çeşitli doğrusal ve parabolik denklemlerin tersini elde etme ve çözümünü ayrıca grafiklerinin çizimini kâğıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında yapmaları istenmiştir. Bu çalışma yaprağı, analitik düzlemde bir noktanın hareket edişiyle oluşturduğu yolun geometrik görüntüsünün koordinatları, öğrencilere koordinat sistemi, analitik düzlem ve doğru grafiklerinin kavramlarıyla ilgili yapılandırmalarını tekrar ele almak ve bu kavramları görsel olarak göstermek için tasarlanmıştır. Bu bağlamda öğretmen adaylarının her bir soru tipine yönelik bazı teknikler kullandığı gözlenmiştir. Katılımcılar bu çalışma yaprağında, verilen fonksiyonları çözmeye ve grafiklerini çizmeye çalışırken kâğıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında çoğunlukla benzer enstrümanlı teknikleri kullandıkları tespit edilmiştir. Kağıt-Kalem ortamında kullanılan teknikler, Cebirsel işlemler, Değişken değiştirme, Birebirlik ve örtenlik analizi, Grafiksel analiz, Simetri alma, Tam kare tamamlama, Denklem dönüşümü, Cebirsel doğrulama ve Analitik inceleme, şeklindedir. Cabri-Geometri ortamında kullanılan benzer teknikler ise, Nokta belirleme, Sayı belirleme, Koordinat belirleme, Hesap makinesi aracı kullanımı, Doğru ve ışın oluşturma, Ölçüm aktarım, Geometrik yer oluşturma, Doğruya göre simetri oluşturma olarak belirlenmiştir.

Birinci gruptaki öğrenciler (Ö1, Ö2) ters fonksiyonlar çalışma yaprağını inceledikten ve araştırmacının açıklamalarını dinledikten sonra çalışma yaprağındaki soruları yanıtlamaya başlamıştır. Araştırmacı öncelikle bu çalışma yaprağının konuyla ilgili 3 temel matematik alan

bilgisi sorusu, iki doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonlar ile ilgili ters fonksiyonların çözümü ve grafiklerinin çizimi ile ilgili hem kâğıt-kalem ortamında hem de Cabri-Geometri ortamında, sorudan oluştuğunu açıklamıştır. Fonksiyonlar ile ilgili soruların öncelikle kâğıt-kalem ortamında çözülüp grafiğinin çizilmesi, sonrasında Cabri-Geometri ortamını inceleyerek grafiklerin çizilmesini istemiştir. Öğrenciler çalışma yapraklarındaki soruları sırasıyla ‘Ters fonksiyon nedir?’, ‘Bir fonksiyonun ters fonksiyonu tanımlanabilmesi için hangi şartlar gereklidir?’ ve ‘Fonksiyonun tersi nasıl alınır?’ sorularını yanıtladıktan sonra verilen fonksiyonların çözümüne başlamışlardır. Ancak, Ö1 ve Ö2 bir sorunun önce kâğıt-kalem ortamında sonrasında aynı sorunun çözümü ve grafiğinin çizimini Cabri-Geometri ortamında tamamladıktan sonra diğer soruya geçmeyi tercih etmişlerdir.

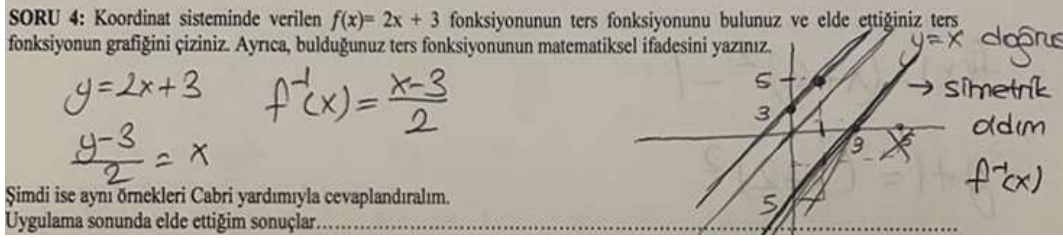
Bu kısımda Grup 1, 2 ve 3’ün kâğıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında gerçekleştirdiği enstrümantal oluşum süreci aktarılırken gruptaki öğrencilerin çalışma sürecinde aralarında geçen diyalog, çalışma kağıtları ve ekranlarından kesitler verilmektedir. Ö1 ve Ö2, ters fonksiyon kavramına dair yanıtlarında, fonksiyonun tersinin tanımlanabilmesi için gerekli koşulları anlamaya çalışmaktadır. Ö1, fonksiyonun tersinin tanımlanabilmesi için "örten" ve "birebir" olması gerektiğini belirtmiş ve "çünkü fonksiyonu ters çevirdiğimizde çıktı kümesi girdi kümesi olacak" diyerek açıklamıştır. Ayrıca, "eğer boşta eleman kalırsa bazıları eşleşmemiş olur bu yüzden fonksiyon tanımlı olmaz" diyerek örten kavramına vurgu yapmıştır. Birebir olma durumunu ise "bir eleman birden fazla elemana giderse fonksiyon tanımlı olmaz" şeklinde açıklayarak bu fonksiyonlarla ilgili zihinsel şemasında birebir ve örten fonksiyon kavramlarını birbirine bağlı şekilde ele almaktadır. Ö2, benzer şekilde birebir ve örten olma gerekliliğini vurgulamış, birebirlik "bir elemanın birden fazla elemanla eşleşmemesi için" ve örtenlik "girdilerde boş bir eleman kalmaması için gereklidir" şeklinde ifade etmiştir. Ayrıca ters fonksiyonun bulunması için "x'i yalnız bırakıyoruz denklemde, sabit katsayısı 1 olacak şekilde ve yanında hiçbir sabit sayı olmadan" diyerek cebirsel bir süreç tanımlamıştır. Bu açıklamalar, Ö1 ve Ö2’nin ters fonksiyonun varlığına ilişkin gerekli koşulları kavrama sürecinde benzer bir yaklaşım sergilediklerini ortaya koymaktadır. Bu durum, öğrencilerin birebirlik ve örtenlik kavramlarını teorik düzeyde ifade edebildiklerini; ancak bu kavramları grafiksel temsiller ve çözüm süreçleriyle bütünleştirme aşamasında sınırlı kaldıklarını göstermektedir. Yanıtlarından yola çıkarak, öğrencilerin zihinsel şemalarının birebir ve örten fonksiyon kavramlarıyla şekillenmeye başladığı görülmektedir. Özellikle, ters fonksiyonun tanımlanabilmesi için gerekli koşulları fark etmeleri, kavramlar arasındaki bağlantıları kurduklarını göstermektedir. Öğrenciler, ters fonksiyonun cebirsel ve grafiksel temsilleri üzerine düşünerek bu bilgileri birbirleriyle ilişkilendirmektedir. Ö1’in alan bilgisi temel sorular ile ilgili yanıtları sırasıyla şekil 1’de verilmiştir.



Şekil 1. Ö1’in ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik temel alan sorularına ilişkin yanıtları.

Ö1 ve Ö2, ters fonksiyonlarla ilgili tanımlama sorularından sonra, doğrusal fonksiyonun kâğıt-kalem ortamında tersini bulma sürecine geçmiştir. Ö1, "x yalnız bırakılır sonra x yerine y, y yerine x yazılır" diyerek ters fonksiyonun bulunma sürecini özetlemektedir. Ö1, $f(x)=2x+3$ fonksiyonunun tersini elde etmek amacıyla şu işlemleri gerçekleştirmiştir: " $y=2x+3$, buradan

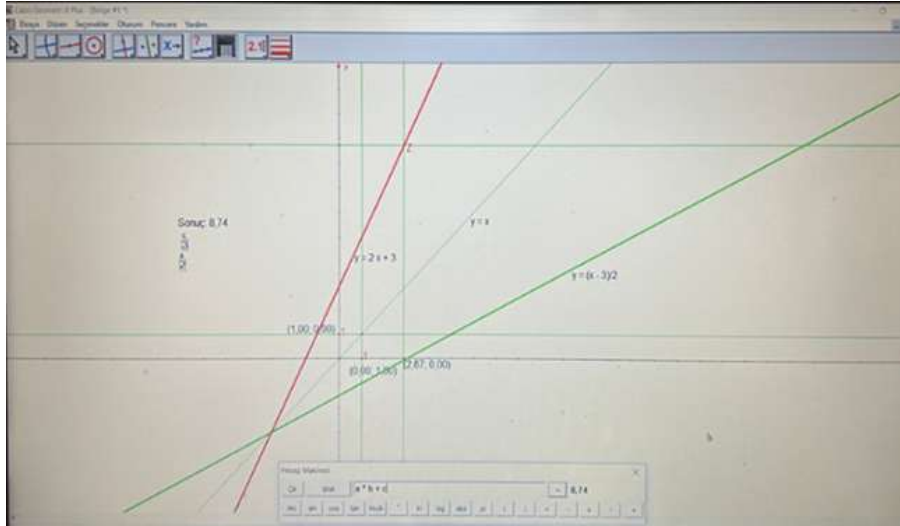
$y-3=2x$, $x=(y-3)/2$, yani $f^{-1}(x)=(y-3)/2$ ". Sonrasında şekil 2’de görüldüğü üzere grafiği çizmek için "x yerine 1 verelim y 5 olsun, 0 vereyim y 3 olur" diyerek doğrusal fonksiyonun tersinin grafiğini oluşturmuştur.



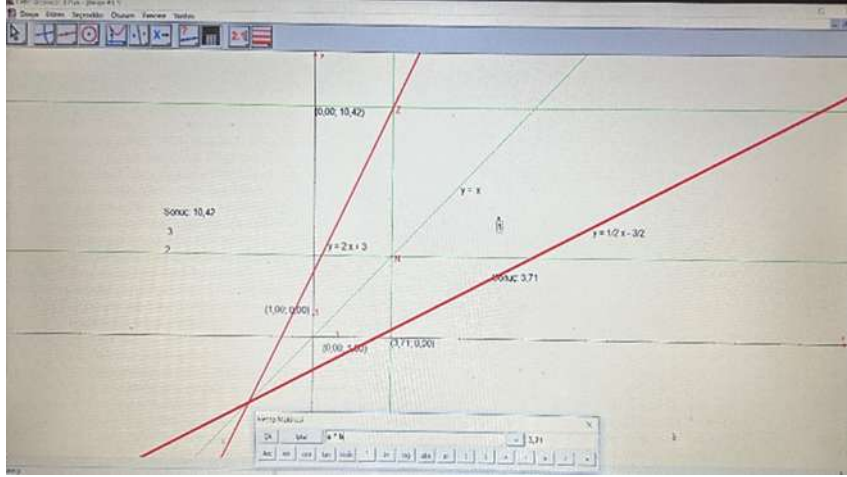
Şekil 2. Ö1’in ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik doğrusal fonksiyona ilişkin yanıtı.

Bu süreçte, "y=x doğrusunu çiziyoruz ve doğrusal grafiğin y=x doğrusuna göre simetriğini alıyoruz" ifadesini kullanarak, fonksiyonun tersinin y=x doğrusuna göre simetri alınarak elde edilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Ö2’de benzer adımları denklemi çözüp ve grafiğini çizmiştir.

Cabri-Geometri ortamına gelince, Ö2, "kesişim noktasını bulmak için dik doğruları çiziyoruz, bu şekilde kesişim noktayı belirliyoruz" diyerek işlemleri açıklamıştır. Ancak süreçte bazı teknik sorunlar yaşanmıştır. Ö1, "geometrik yeri oluşturamadık, bir daha deneyelim belki bir yerde hata yapmışız" diyerek süreci tekrar etmiştir. Son olarak, "y = x doğrusunun orijinden ve (1,1) noktasından geçtiğini biliyoruz, bundan yola çıkarak x ve y eksenleri üzerinde 1 noktasından geçen dik doğruları çizelim" diyerek farklı bir yöntemle doğruyu oluşturmuştur. Ancak, Ö1 ve Ö2 sürecin son aşamasında yanlış bir yol izlediklerini fark etmiştir. Simetri noktalarından bir doğru çizmek yerine, geometrik bir yer belirlemeleri gerektiğini gözden kaçırmışlardır. Ö2’nin bu fonksiyonun çizimi ile ilgili hatalı ve doğru olan çizimlerinin ekran kaydından kesitler şekil 3 ve 4’te verilmiştir.

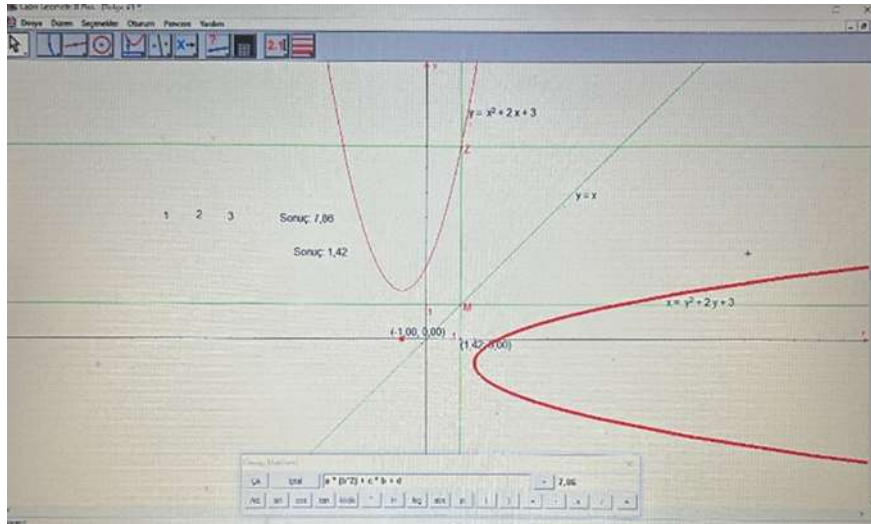


Şekil 3. Ö2’nin ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik hatalı grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.

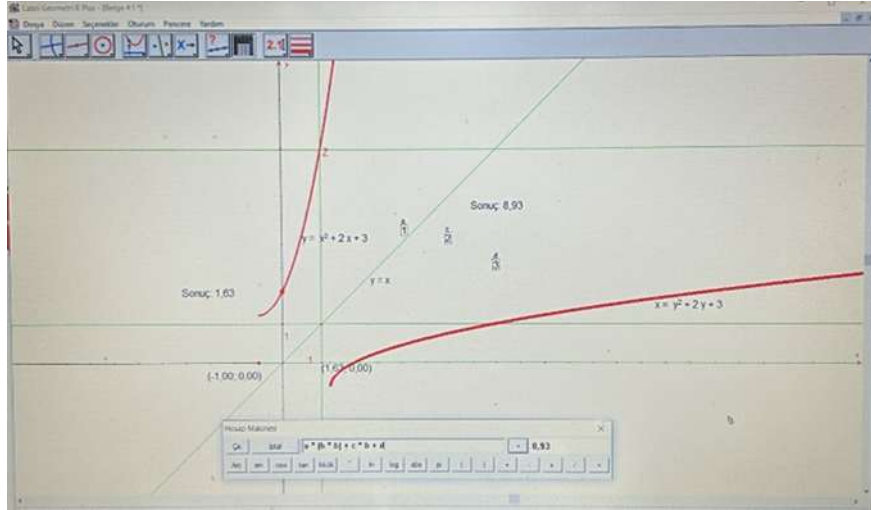


Şekil 4.Ö2'nin ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik grafik çizimine ilişkin ekran kaydından bir kesit.

Ö1 ve Ö2, $f(x)=x^2+2x+3$ parabolüne ait ters fonksiyonun çözümü ve grafiğinin oluşturulmasına ilişkin kâğıt-kalem ortamında cebirsel işlemler yaparak denklemi yeniden düzenlemeye çalışmıştır. İkinci grupta $f(x)=x^2+2x+3$ parabolüne ait ters fonksiyonun çözümü ve grafiğinin oluşturulmasına ilişkin işlemler gerçekleştirilmiştir. Problemin çözümünü kâğıt-kalem ortamında yapabilmelerine rağmen fonksiyona ilişkin grafiği oluşturamamışlardır. Cabri-Geometri ortamına gelince, Ö3 ve Ö4, bu soruya bir önceki problemde yaptıkları adımları aynen tekrar ederek çözüm ve grafiği elde etmeye çalışmıştır. Ancak, Ö3, yine bir hata olduğunu fark etmiştir ve "Oluştur ama birebir değil gibi duruyor." diyerek başlangıç noktasını doğru bir şekilde oluşturmadığını anlamıştır. Ö4 ise, tanım kümesini göz ardı ettiklerini belirterek, "Çünkü tanım kümesini dikkate almadık. Soruda fonksiyonun tanım kümesi $f: [-1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ olarak verilmişti." açıklamasını yapmıştır. Ö3, tanım kümesini belirlerken x eksenini yerine ışın kullanmayı önermiştir: "Eğer tanım kümesi $[-1, \infty)$ ise, başlangıç noktasını doğrudan -1'e koyalım ve sonsuza giden bir ışın oluşturalım." Ö4, bu düzeltmenin ardından ters fonksiyonun birebir ve örten olduğunu belirterek, "Evet, ters fonksiyonumuz birebir ve örten oldu." demiştir. Ö3 ve Ö4'ün bu soruyla ilişkin yanıtları şekil 5 ve 6'da verilmiştir.



Şekil 5. Ö3'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik parabol fonksiyonun tersine ilişkin ekran kaydından bir kesit.



Şekil 6. Ö3'ün ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik parabol fonksiyonun tersine ilişkin ekran kaydından bir kesit.

Sonunda, Ö3 ve Ö4, cebirsel ve grafiksel çözüm yöntemlerini birleştirerek ters fonksiyonu kavramını anlamlandırmaya çalışmış ve doğru çözümü bulmuşlardır. Ö3 ve Ö4'ün ters fonksiyonlar çalışmasına ait enstrümantal oluşum süreci analiz edildiğinde, öğretmen adaylarının matematiksel kavramları anlamlandırma ve Cabri-Geometri Dinamik-Geometri ortamını kullanma süreçleri gözlemlenebilmektedir. Sonuç olarak, öğretmen adaylarının kağıt-kalem ortamında geliştirdikleri enstrümanlı eylem şemaları daha çok değişkenlerin yer değiştirilmesi ve cebirsel çözüm gibi işlemsel adımlara dayanmış; buna karşın Cabri-Geometri ortamında şemalar, $y=x$ doğrusuna göre simetri alma ve geometrik yer oluşturma gibi dinamik özellikler sayesinde kavramsal anlamlandırmayı desteklemiştir. Böylece kağıt-kalem ortamı işlem odaklı, Cabri-Geometri ortamı ise kavramsal ve görsel odaklı bir yapı ortaya koymuştur.

Bu bulguları destekleyen biçimde, uygulama öncesi ve sonrası yapılan görüşmelerde de benzer eğilimler gözlenmiştir. Öğretmen adaylarının uygulama öncesi ve sonrasında verdikleri yanıtlar değerlendirildiğinde, ters fonksiyonlara yönelik kavramsal anlayışlarının kâğıt-kalem ortamında çoğunlukla işlem temelli ve sınırlı kaldığı görülmüştür. Örneğin Ö1, birebirlik ve örtenlik koşullarına teorik düzeyde hâkim olmasına rağmen uygulama sürecinde zorluk yaşadığını, Cabri-Geometri'de ise $y=x$ doğrusuna göre simetri alma ve geometrik yer belirleme adımlarının kavramsal anlamını güçlendirdiğini belirtmiştir. Ö2, uygulama öncesinde simetriyi yalnızca orijine göre düşündüğünü, ancak Cabri-Geometri ortamında bu yanılgıyı düzelterek ters fonksiyonun simetrisini doğru bir şekilde anlamlandırıldığını ifade etmiştir. Ö3, ters fonksiyonların grafiklerini dinamik ortamda çizmenin kâğıt-kalem yöntemine göre daha kolay olduğunu, simetri ilişkisini görselleştirerek kavramsal analiz yapabildiğini vurgulamıştır. Ö4, ters fonksiyon grafiğinde tanım kümesinin belirlenmesi gerektiğini fark etmiş ve birebirlik ile örtenlik koşullarını Cabri-Geometri sayesinde somutlaştırmıştır. Ö5 ve Ö6 ise ters fonksiyon grafiklerinin dinamik temsiller aracılığıyla simetri ilişkisi üzerinden görselleştirilmesinin kavramsal anlamlarını zenginleştirdiğini belirtmişlerdir.

Sonuç olarak, öğretmen adaylarının ters fonksiyonlara dair kavramsal anlayışları, Cabri-Geometri ortamında yapılan simetri ve tanım kümesi temelli etkinliklerle derinleşmiş ve işlem odaklı yaklaşımların ötesine geçmiştir.

Tablo 2'de katılımcıların söz konusu ortamlarda Ters Fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bileşenleri verilmiştir.

Tablo 2. Öğretmen adaylarının ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik enstrümanlı eylem şemalarının bileşenleri

Ortam	Öğretmen adayı	İşlevsel Sabitler	Eylemdeki Teoremler	Eylemdeki Kavramlar	Kategori
Kağıt-Kalem	Ö1, Ö2	Doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların, ters fonksiyonlarının çözümü ve grafiğinin çizimi için, fonksiyonun birebir ve örten olup olmadığı tartışılmıştır. x'i yalnız bırakma ve grafik oluşturma aşamalarında kavramsal zorluk yaşanmıştır.	Analitik düzlemde doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların ters fonksiyonları elde edilip grafiksel temsili çizilecek ise, fonksiyonun birebir ve örten olması gereklidir ve girdiler ve çıktılar yani x ve y'nin yer değiştirilmesi gerekiyor.	Cebirsel işlemler ve işlemsel dönüşümler (örneğin, denklem düzenleme, koordinat dönüşümü gibi teknikler)	Birebirlik ve örtenlik koşullarını tartışma, Cebirsel işlem uygulama, Grafik oluşturma sırasında kavramsal zorluk
	Ö3, Ö4	Doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların ters fonksiyonlarının çözümü ve grafiğinin çizimi sürecinde, fonksiyonun birebir ve örten olup olmadığı tartışılmış; x'i yalnız bırakma ve grafik oluşturma aşamalarında ise kavramsal zorluklar yaşanmıştır.	Analitik düzlemde doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların ters fonksiyonları elde edilip grafiksel temsili çizilecek ise, fonksiyonlar birebir ve örten olmalıdır.	İşlemsel dönüşümler (denklem düzenleme, koordinat dönüşümü gibi teknikler)	Birebirlik ve örtenlik koşullarını tartışma, Cebirsel işlem uygulama, Grafik oluşturma sırasında kavramsal zorluk
	Ö5, Ö6	Doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların terslerinin çözümü ve grafiğinin çizimi için, x'i yalnız bırakma, doğrusal fonksiyonun tersinin birebir ve örten olup olmadığını tartışma ve parabol fonksiyonunun tersini alırken cebirsel işlemler yapma adımları uygulanır.	Analitik düzlemde doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların ters fonksiyonları elde edilip grafiksel temsili çizilecek ise, fonksiyon birebir ve örten olmalıdır.	Cebirsel işlemler ve işlemsel dönüşümler (denklem düzenleme, x'i yalnız bırakma, fonksiyonun tersinin alınması gibi teknikler)	Birebirlik ve örtenlik koşullarını tartışma, Cebirsel işlem uygulama, Grafik oluşturma sırasında kavramsal zorluk
Cabri-Geometri	Ö1, Ö2 Ö2	Doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların terslerinin çözümü ve grafiğinin oluşturulması sürecinde, doğruya göre simetri alma, ardından geometrik yer belirleme ve dinamik grafik oluşturma işlemleri uygulanır.	Eğer doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların terslerinin çözümü ve grafiği oluşturulacaksa, bu işlem doğruya göre simetri alma, ardından geometrik yer belirleme ve dinamik grafik oluşturma yoluyla gerçekleştirilir.	Simetri alma ($y = x$ doğrusuna göre), Geometrik yer oluşturma, Ters fonksiyon kavramı, Dinamik ortamda grafik oluşturma, Fonksiyon ve ters fonksiyon ilişkisi	Doğruya göre simetri alma, Geometrik yer belirleme, Dinamik grafik oluşturma,
	Ö3, Ö4	Doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların terslerinin çözümü ve grafiğinin oluşturulması sürecinde, doğruya göre simetri alma, ardından geometrik yer belirleme ve dinamik grafik oluşturma işlemleri uygulanır.	Eğer doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların terslerinin çözümü ve grafiği oluşturulacaksa, bu işlem doğruya göre simetri alma, ardından geometrik yer belirleme ve dinamik grafik oluşturma yoluyla gerçekleştirilir.	Simetri alma ($y = x$ doğrusuna göre), Geometrik yer oluşturma, Ters fonksiyon kavramı, Dinamik ortamda grafik oluşturma, Fonksiyon ve ters fonksiyon ilişkisi	Doğruya göre simetri alma, Geometrik yer belirleme, Dinamik grafik oluşturma,
	Ö5, Ö6	Doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların terslerinin çözümü ve grafiğinin oluşturulması sürecinde, doğruya göre simetri alma, geometrik yer belirleme ve grafik üzerinde dinamik değişiklikler yaparak ters fonksiyonun görselleştirilmesi adımları izlenir.	Eğer doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonların terslerinin çözümü ve grafiği oluşturulacak ise, doğruya göre simetri alınır, geometrik yer belirlenir ve grafik üzerinde dinamik değişiklikler yapılarak ters fonksiyon görselleştirilir.	Doğruya göre simetri alma, Geometrik yer oluşturma, Dinamik grafik oluşturma, Ters fonksiyonun görsel temsili,	Doğruya göre simetri alma, Geometrik yer belirleme, Grafik üzerinde dinamik değişiklik yaparak ters fonksiyonun görselleştirilmesi

Tablo 2’de öğretmen adaylarının kâğıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında ters fonksiyonlar çalışma yaprağına yönelik gerçekleştirdikleri enstrümantal oluşum süreçlerinde ortaya çıkan işlevsel sabitler, eylemdeki teoremler, eylemdeki kavramlar ve kategoriler detaylı bir şekilde sunulmuştur. Kâğıt-kalem ortamında birebirlik ve örtenlik koşullarını tartışma, cebirsel işlem uygulama, grafik oluşturma sırasında kavramsal zorluk gibi temel kategorilerde yoğunlaştıkları görülmektedir. Cabri-Geometri ortamında ise öğretmen adaylarının doğruya göre simetri alma, geometrik yer belirleme, dinamik grafik oluşturma, grafik üzerinde dinamik değişiklik yaparak ters fonksiyonun görselleştirilmesi kategorileri grafik oluşturma süreçlerini gerçekleştirdikleri gözlemlenmiştir. Bu bulgular, her iki ortamda geliştirilen enstrümanlı eylem şemalarının farklı boyutlarda şekillendiğini ve öğretmen adaylarının süreç boyunca farklı zihinsel yapılandırmalar yaptıklarını göstermektedir. Bu nedenle, elde edilen veriler tematik düzeyde analiz edilerek, kâğıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında ortaya çıkan ortak ve farklı yönler aşağıda temalar halinde sunulmuştur.

3.2. Kâğıt-kalem ortamında oluşan temalar

Kâğıt-kalem ortamında ortaya çıkan temalar aşağıda sentezlenmiştir.

Kavramsal Bilgilerin İşleme Dönüşmesi: Bu tema, birebirlik ve örtenlik kavramlarının ters fonksiyonun geçerliliğini tartışma sürecinde nasıl işlevselleştirildiğine odaklanmaktadır. Özellikle doğrusal fonksiyonun birebirliği ve parabol fonksiyonlarda tanım kümesinin kısıtlanması üzerine yapılan tartışmalar bu temayı desteklemiştir.

İşlem Odaklı Temsil ve Cebirsel Dönüşüm: Öğretmen adaylarının doğrusal ve parabolik fonksiyonların terslerini bulmak için x ’i yalnız bırakmaya yönelik gerçekleştirdiği cebirsel işlemler bu temanın merkezindedir. Değişken değiştirme, denklem düzenleme ve tam kareye tamamlama gibi teknikler, ters fonksiyonların elde edilmesinde başvuru alan temel adımlar olmuştur.

Temsilde Zorluk ve Kavramsal Sınırlılıklar: Öğretmen adaylarının ters fonksiyon grafiğini oluştururken yaşadığı güçlükler bu temanın temelini oluşturmaktadır. Özellikle parabol fonksiyonlarda tanım ve değer kümelerinin doğru belirlenememesi ve $y=x$ doğrusuna göre simetrisinin grafiksel karşılığının yorumlanmasında yaşanan sorunlar kavramsal sınırlılıkları ortaya koymuştur.

3.3. Cabri-geometri ortamında oluşan temalar

Cabri-Geometri ortamında ortaya çıkan temalar aşağıda sentezlenmiştir.

Dinamik Temsil Yoluyla Kavramsal Anlamlandırma: Bu tema, ters fonksiyonların grafiksel simetrik yapıları oluşturulurken kullanılan doğruya göre simetri alma ve geometrik yer belirleme tekniklerine odaklanmaktadır. Bu işlemler, öğretmen adaylarının ters fonksiyonların yapısını cebirsel ifade ile bütünleştirmelerine olanak tanımıştır.

Görselleştirme Yoluyla Kavramlar Arası İlişkilendirme: Öğretmen adayları, ters fonksiyonlarda $y=x$ doğrusuna göre simetri ilişkisini gözlemleyerek, fonksiyonun cebirsel ifadesi ile görsel temsili arasında bağlantı kurmuşlardır. Bu süreç, kavramlar arası ilişkilendirmeyi desteklemiştir.

Etkileşimli Ortamda Fonksiyon Davranışlarının Dinamik Analizi: Ters fonksiyonlarda grafik üzerindeki değişimlerin anlık gözlemlenmesi ve yorumlanması, öğretmen adaylarının fonksiyon davranışını daha derinlemesine anlamlandırmalarına katkı sağlamıştır.

4. Sonuç

Bu bölümde, araştırma sonuçları veri analizi sürecinde elde edilen temalar doğrultusunda sunulmuş; Sonuçlarlar ilgili literatür ve kavramsal çerçeve ışığında tartışılmıştır. Bu

araştırmada, öğretmen adaylarının kâğıt-kalem ve Cabri-Geometri ortamlarında ters fonksiyonların çözümü ve grafiklerinin çizimine yönelik geliştirdikleri enstrümanlı eylem şemaları incelenmiş olup; sonuçlar, iki ortamda şekillenen işlevsel sabitler, eylemdeki teoremler ve kavramlar açısından belirgin farklılıklar olduğunu göstermektedir. Bu araştırmanın bazı sınırlılıkları bulunmaktadır. Çalışma, sınırlı sayıda öğretmen adayı ile yürütülmüş olup bulgular bu bağlamda değerlendirilmelidir. Ayrıca uygulamanın belirli bir ders süresiyle sınırlı olması, öğretmen adaylarının enstrümantal oluşum süreçlerinin uzun vadeli gelişimini izlemeyi olanaklı kılmamıştır. Bu sınırlılıklara rağmen çalışma, ters fonksiyonlara ilişkin enstrümantal oluşum süreçlerinin derinlemesine incelenmesine olanak sağlayan nitel bir bakış açısı sunmaktadır.

Kâğıt-kalem ortamında geliştirilen işlevsel sabitler büyük ölçüde x ve y 'nin yer değiştirilmesi, x 'in yalnız bırakılması ve cebirsel işlemler üzerinden ters fonksiyonun elde edilmesine dayalı olduğu gösterilmiştir. Bu süreçte öğretmen adaylarının eylemdeki teoremleri, “Eğer ters fonksiyon elde edilecek ve grafiği çizilecekse, fonksiyon birebir ve örten olmalıdır” ilkesi etrafında şekillendiği sonucuna varılmıştır. Ancak, grafik oluşturma sürecinde birebirlik ve örtenlik koşullarını uygulamada kavramsal zorluklar yaşanmış; fonksiyonların tanım kümeleri ile görsel temsilleri arasındaki bağlantılar sınırlı düzeyde kurulabileceği tespitlenmiştir. Bu sonuç, literatürde vurgulanan bazı sonuçlarla örtüşmektedir. Drijvers (2019), 15 ülkeyi kapsayan çalışmada, kâğıt-kalem ortamlarının prosedürel bilginin öne çıkmasına yol açtığını ve kavramsal anlamayı geciktirebileceğini belirtmiştir. Benzer şekilde Kieran ve Drijvers (2006), geleneksel öğretim (kâğıt-kalem ortamı ve benzer) süreçlerinde işlemsel düşüncenin baskın olduğunu ve yapısal kavrayışın ihmal edildiğini ifade etmiştir. Trouche (2005) ise araçların enstrümantal oluşum sürecinde enstrümantasyonun gerçekleşmediği durumlarda kavramsal anlamın sınırlı kaldığını vurgulamaktadır. Buna karşılık Xu (2025), kâğıt-kalem ortamının temel becerilerin gelişiminde önemli bir rol oynadığını ve farklı öğrenme stillerine uyum sağlayabildiğini öne sürerek bu çalışmanın sonuçlarını desteklememektedir. Bunun temel nedeni, Xu'nun çalışmada lise öğrencilerinin problem çözme süreçleri incelenmiş olması oysa bu çalışmanın öğretmen adaylarıyla yapılmış olması olarak yorumlanmıştır.

Ayrıca, Cabri-Geometri ortamında geliştirilen işlevsel sabitler, dinamik araçların sunduğu olanaklarla farklı bir nitelik kazandığı sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmen adayları ters fonksiyonun grafiğini oluştururken $y = x$ doğrusuna göre simetri alma, geometrik yer belirleme ve dinamik grafik oluşturma tekniklerinden yararlanmışlardır. Bu bağlamda eylemdeki teoremler, “Eğer ters fonksiyonların çözümü ve grafiği oluşturulacaksa, bu işlem $y = x$ doğrusuna göre simetri alma, ardından geometrik yer belirleme ve dinamik grafik oluşturma yoluyla gerçekleştirilir” biçiminde ortaya konulmuştur. Cabri-Geometri ortamında ortaya çıkan kavramlar ise fonksiyon ve ters fonksiyon ilişkisini görsel boyutta anlamlandırmaya yöneliktir. Özellikle grafik üzerinde yapılan dinamik değişiklikler, adayların fonksiyonun simetriği ve ters fonksiyon kavramını yalnızca cebirsel olarak değil, aynı zamanda grafik olarak da anlamlandırdıklarını göstermiştir. Bu sonuçlar, Eisenberg ve Dreyfus (1991)'in, öğrencilerin grafiklerin biçimsel yönlerini üretmede başarılı olduklarını ancak matematiksel anlamı yapılandırmada yetersiz kaldıklarını vurgulayan çalışmasıyla benzerlik göstermektedir. Bununla birlikte Mariotti (2000), dinamik ortamların öğrencilerin çoklu temsiller arasında geçiş yapma ve grafiklerin davranışsal özelliklerini analiz etme becerilerini geliştirdiğini ifade etmiş ve bu çalışmadaki sonuçlarla doğrudan örtüşmektedir.

Dinamik ortamların kavramsal öğrenmeye katkısı üzerine yapılan diğer çalışmalar da bu sonuçları destekler niteliktedir. Bokhove ve Drijvers (2012), dijital araçların yalnızca teknik destek olmadığını, aynı zamanda öğrencilerin matematiksel kavrayışlarını derinleştiren bilişsel araçlar olduğunu vurgulamaktadır. Benzer şekilde Zhang et al. (2025), dinamik araçların grafiklerin cebirsel ifadelerle ilişkilendirilmesini kolaylaştırarak anlam inşasında kritik bir rol

oynadığını belirtmiştir. Ancak, Baccaglini-Frank ve Antonini (2016) ve Pittalis ve Drijvers (2023), dinamik ortamların her zaman kavramsal anlamayı derinleştirmede, öğrencilerin bazen yalnızca işlemsel yeterlikler üzerinde yoğunlaştıklarını ileri sürmektedir. Bu farklılık, dinamik yazılımların etkisinin bireysel öğrenme yolları ve öğretim tasarımıyla yakından ilişkili olduğunu göstermektedir.

Genel olarak, bu araştırma öğretmen adaylarının kâğıt-kalem ortamında işlemsel bilgiye dayalı, sabit ve doğruluğa odaklı çözüm stratejileri geliştirdiklerini; Cabri-Geometri ortamında ise etkileşimli, görsel ve kavramsal yönelimler sergilediklerini ortaya koymuştur. Dinamik ortamda geliştirilen enstrümanlı eylem şemaları, özellikle çoklu temsiller arasında geçiş yapabilme, grafik davranışlarını gözlemleme ve anlamlandırma, değişkenler arasındaki ilişkileri açıklayabilme gibi kavramsal özellikler taşımaktadır. Bu sonuçlar, öğretmen adaylarının geliştirdiği enstrümanlı eylem şemalarının yalnızca kullandıkları dijital veya kâğıt-kalem gibi ortamların araçlardan değil, bu araçlarla kurdukları etkileşimden beslendiğini göstermektedir. Sonuç olarak, kâğıt-kalem ortamı işlemsel bilgiye dayalı çözüm yollarını pekiştirirken, Cabri-Geometri ortamı ters fonksiyonların kavramsal anlamlandırılmasına ve grafiksel temsillerle bütünleştirilmesine katkı sağladığı ortaya konulmuştur. Bu çalışma, öğretmen adaylarının geliştirdiği enstrümanlı eylem şemalarının, yalnızca kullandıkları dijital veya kâğıt-kalem ortamı değil, bu araçlarla kurdukları etkileşimden beslendiğini; bu etkileşimin ardında yatan dinamikleri kavramada ise enstrümantal oluşum teorisinin, öğrenmenin doğasını ve dönüşümünü anlamak için vazgeçilmez bir kuramsal anahtar olduğunu açıkça ortaya koymaktadır.

Bu bağlamda elde edilen sonuçlar, öğretmen yetiştirme programlarında teknoloji destekli matematik öğretimine ilişkin derslerin yalnızca yazılım kullanımına odaklanmakla sınırlı kalmaması gerektiğini göstermektedir. Özellikle ters fonksiyonlar gibi soyut cebirsel kavramların öğretiminde, öğretmen adaylarının kâğıt-kalem ve dinamik geometri ortamlarını karşılaştırmalı olarak deneyimleyebilecekleri öğretim tasarımlarına yer verilmesi önem arz etmektedir. Ayrıca öğretmen adaylarının, kullandıkları araçlarla geliştirdikleri enstrümanlı eylem şemalarının farkına varmalarını destekleyen etkinliklerin programa dâhil edilmesi, kavramsal öğrenmenin derinleştirilmesine katkı sağlayabilir. Bu tür uygulamaların, öğretmen adaylarının gelecekteki sınıf içi öğretimlerinde teknoloji ile pedagojik amaçlar arasında daha bilinçli ve dengeli bir ilişki kurmalarına olanak tanıyacağı düşünülmektedir. Ayrıca bu araştırmada, araştırmacının sürece doğrudan dahil olması ve uygulamaları sahada yürütmesi nedeniyle, enstrümantal oluşum teorisinin bir boyutu olan enstrümantal orkestrasyon da dikkate alınabilir. Araştırmacının ortamları yönetme biçimi, görevleri yapılandırma süreci ve öğrencilerin araçlarla etkileşimlerini yönlendirme stratejileri, adayların enstrümanlı eylem şemalarının gelişiminde belirleyici olduğu düşünülmektedir. Dolayısıyla bu çalışmanın devamı olarak, yalnızca bireysel şemaların değil, aynı zamanda bu şemaların sınıf içi orkestrasyon bağlamında biçimlenişinin de incelenmesi alana katkı sağlayabileceği düşünülmektedir.

Yazarların Katkı Beyanı

Her iki yazar da araştırmanın tasarımı, veri toplama, analiz, yorumlama ve makalenin yazım aşamalarına eşit düzeyde katkı sağlamıştır.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar olarak aramızda bu çalışmayı etkileyebilecek mali olan ya da olmayan herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Finansman

Bu çalışma, kamu, ticari veya kâr amacı gütmeyen herhangi bir finansman kuruluşundan desteklenmemiştir.

Etik Kurul Onayı

Bu araştırma, Bursa Uludağ Üniversitesi Araştırma ve Yayın Etik Kurulu'nun 27/10/2023 tarihli ve 2023-09 sayılı kararı ile alınan izinle yürütülmüş ve araştırma için alınan etik kurul izin bilgisi doğrultusunda çalışma tamamlanmıştır.

Kaynaklar

- Ainsworth, S., 1999. The functions of multiple representations. *Computers ve Education*, 33(2–3): 131–152.
- Baccaglini-Frank, A., Antonini, S., 2016. From conjecture generation by maintaining dragging to proof. *Arxiv Preprint Arxiv*, 1605.02583.
- Barabash, M., 2019. Dragging as a geometric construction tool: Continuity considerations inspired by students' attempts. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 5(2): 124–144.
- Bokhove, C., Drijvers, P., 2012. Effects of a digital intervention on the development of algebraic expertise. *Computers ve Education*, 58(1): 197–208.
- Cresswell, J., 2013. Qualitative inquiry ve research design: Choosing among five approaches. SAGE.
- Dede, Y., Argün, Z., 2003. Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24: 180–185.
- Dreyfus, T., Tsamir, P., 2004. Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23(3): 271–300.
- Dreyfus, T., Hershkowitz, R., Schwarz, B., 2015. The nested epistemic actions model for abstraction in context: Theory as methodological tool and methodological tool as theory. In A. Bikner-Ahsbabs, C. Knipping, ve N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods*. Springer, pp. 185–217.
- Drijvers, P., 2019. Embodied instrumentation: Combining different views on using digital technology in mathematics education. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (No. 1)*. Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.
- Drijvers, P., Sinclair, N., 2024. The role of digital technologies in mathematics education: Purposes and perspectives. *ZDM–Mathematics Education*, 56(2): 239–248.
- Drijvers, P., Trouche, L., 2008. From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume ve M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives*. Information Age Publishing, pp. 363–392.
- Eisenberg, T., Dreyfus, T., 1991. On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann ve S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematical Association of America, pp. 25–37.
- Engelhardt, P.V., Corpuz, E.G., Ozimek, D.J., Rebello, N.S., 2004. The teaching experiment—What it is and what it isn't. *AIP Conference Proceedings*, American Institute of Physics, pp. 157–160.

- Fitrianna, A.Y., Rosjanuardi, R., Prabawanto, S., 2024. Algebraic reasoning of high school students in solving inverse function problems: Viewed from mathematical resilience. *Indonesian Journal of Science and Mathematics Education*, 7(2): 322–336.
- Frankel, R. M., Devers, K.J., 2000. Study design in qualitative research-1: Developing questions and assessing resource needs. *Education for Health*, 13(2): 251–261.
- Haspekian, M., 2005. An “instrumental approach” to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10(2): 109–141.
- Janvier, C.E., 1987. Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 1–9.
- Kaput, J.J., 1998. Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2): 265–281.
- Kieran, C., 1992. The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Macmillan Publishing Company, pp. 390–419.
- Kieran, C., Drijvers, P., 2006. The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11: 205–263.
- Komatsu, K., Jones, K., 2020. Interplay between paper-and-pencil activity and dynamic-geometry-environment use during generalisation and proving. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 6(2): 123–143.
- Laborde, C., 2002. Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6: 283–317.
- MacGregor, M., Stacey, K., 1993. Cognitive models underlying students’ formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3): 217–232.
- Mariotti, M.A., 2000. Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1): 25–53.
- National Council of Teachers of Mathematics, 2000. Principles and standards for school mathematics.
- Ndlovu, M., Wessels, D., De Villiers, M., 2011. An instrumental approach to modelling the derivative in Sketchpad. *Pythagoras*, 32(2): 1–15.
- Nolasco, J., 2018. The struggle with inverse functions doing and undoing process. Master’s Thesis, California State University, San Bernardino.
- Öcal, M.F., Kar, T., Güler, G., İpek, A.S., 2020. Comparison of prospective mathematics teachers’ problem posing abilities in paper-pencil test and on dynamic geometry environment in terms of creativity. *Journal of Research in Mathematics Education*, 9(3): 243–272.
- Paoletti, T., Stevens, I.E., Hobson, N.L., Moore, K.C., LaForest, K.R., 2018. Inverse function: Pre-service teachers’ techniques and meanings. *Educational Studies in Mathematics*, 97(1): 93–109.

- Pittalis, M., Drijvers, P., 2023. Embodied instrumentation in a dynamic geometry environment: Eleven-year-old students' dragging schemes. *Educational Studies in Mathematics*, 113(2): 181–205.
- Segal, R., Oxman, V., Stupel, M., 2021. Using dynamic geometry software to enhance specialized content knowledge: Pre-service mathematics teachers' perceptions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(3): em0647.
- Song, Y., 2021. A review of how class orchestration with technology has been conducted for pedagogical practices. *Educational Technology Research and Development*, 69(3): 1477–1503.
- Steffe, L.P., Ulrich, C., 2014. Constructivist teaching experiment. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education*. Springer, pp. 102–109.
- Tall, D., Gray, E., Ali, M.B., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., ... ve Yusof, Y., 2001. Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Math, Science ve Technology Education*, 1(1): 81–104.
- Tapan, M.S., 2006. Différents types de savoirs mis en œuvre dans la formation initiale d'enseignants de mathématiques à l'intégration de technologies de géométrie dynamique. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Université Joseph-Fourier – Grenoble I.
- Taşlıbeyaz, E., 2010. Ortaöğretim öğrencilerinin bilgisayar destekli matematik öğretiminde matematik algılarına yönelik durum çalışması: Lise 3. sınıf uygulaması. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi.
- Trouche, L., 2004. Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3): 281–307.
- Trouche, L., 2005. Instrumental genesis, individual and social aspects. In D. Guin, K. Ruthven, ve L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument*. Springer, pp. 197–230.
- Verillon, P., Rabardel, P., 1995. Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1): 77–101.
- Xu, C., 2025. Improving mathematical skills of mathematics education students through integrated use of graphing software and programming techniques. *International Journal of Education and Humanities*, 5(1): 277.
- Yuhariati, Y., Johar, R., Khairunnisak, C., Rohaizati, U., Zubaidah, T., 2022. Students' mathematical representation ability in learning algebraic expression using realistic mathematics education. *Jurnal Didaktik Matematika*, 9(1): 151–165.
- Zhang, Y., Wang, P., Jia, W., Zhang, A., Chen, G., 2025. Dynamic visualization by GeoGebra for mathematics learning: A meta-analysis of 20 years of research. *Journal of Research on Technology in Education*, (2): 437–458.